关于连续数方程的一个结果

李忠宁 金涛 撒海花

银川能源学院，宁夏银川 750105;

银川科技学院，宁夏银川 750021

摘 要: 本文用初等方法证明了：当 n,x,r 是正整数且 r>3, 整数 s>0,c=10s+5,gcd(x.c)=1 丢番图方程无整数解。

关键词： 丢番图方程，方幂和，因子，指数，同余式

1 引言及引理

Lebesque[1] 证明了，当 $r=3$，方程 $\sum_{k=0}^{n-1}(x+dk)=(x+dn)^r$（1）

只有正整数解 $n=3, x=3d$. 文 [2] 证明了，当 $4 \le r \le 10$，方程（1）无正整数解 . 我们得到

定理：当 n,x,r 是正整数且 $r>3$. 整数 $s \ge 0, c=10s+5, \gcd(x,c)=1$，丢番图方程 $\sum_{k=0}^{n-1}(x+ck)=(x+cn)^r$（2）

无整数解 .

若无特别说明，本文中字母表示正整数，$m, p_\lambda, l_\lambda, v_\lambda$ 等表示非负整数，Δ, q_λ 表示奇数，将“方程无整数解”简述为“方程无解”.

引入符号：$\overline{N}$ 表示 N 的末位数字；$ordN=\alpha$ 表示 Z^α / N，但 $Z^{\partial+1}+N; \theta_\lambda=0,1,\dots,(Z^\lambda-1),(n_1;x_1)$ 表示

$n=zom+n, x=10t+x_1$;$[\bullet]$ 表示 $\bullet$ 的整数部分。

证明定理需要下列引理，

引理 1 [2], 当 $n \ge 2r+2$，方程（2）无解

引理 2 设 $s^r(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(x+ck)^r$ i=1,2,3,4 $r=4v+i$

$\overline{s^r(zom+n)}=\overline{s^i(n)}$

引理 3 $\gcd(x,c)=1$ （2）式两端末位数字相同的整数当且仅当：

(1) <11;2,4,6,8> ① n , x 奇偶性相反：<6;1,3,7,9>，<11;2,4,6,8>（3.1）

② n , x 奇偶性相同：<11;1,3,7,9>，<16;2,4,6,8>（3.2）

(2) $r=2v+2$ ① n，x 奇偶性相同：<11;1,3,7,9>，<16;2,4,6,8>（3.3）

② n，x 奇偶性相反：<6;1,3,7,9>, <11;2,4,6,8>（3.4）

引理 4 [3] 当 $n=2^\partial q$，$F=\sum_{k=0}^{n-1}(x+2ck)^r$，$2+x$，$u=[x+c(n-1)]n$

(1) $r=2v+2 \quad ordF=\partial=ordn$ (4)

(2) $r=2v+1 \quad ordF=ordu_0$ (5)

引理 5 当 $n=2^\partial q$，$F=\sum_{k=0}^{n-1}(x+2ck)^r$，$2+x$，

$u=[x+c(n-1)]n$

(1) $r=2v+2 \quad ordF=\partial=ordı$ (6)

(2) $r=2v+1 \quad ordF=ordu_0$ (7)

2 定理证明

当 $r>3$，证明方程 (2) 无解只需证明在条件 (3.1)——(3.4) 下方程 (2) 无解

1 $r=2v+1(v>1)$

Ⅰ将 (3.1) 中 <6;1> 代入（2）（8）

这里 $x=10t+1$，（8）左端 $(x+2ck)^r+[x+2c(k+1)]^r \equiv 0(4)$；$[x+c(2k+1)]^r \equiv 0(4)$；当 $t=2t_1$（8）为 $1 \equiv 3(4)$，当 $t=2t_1+1$（8）为 $3 \equiv 1(4)$

（3.1）中其余 $\langle n_1;r_1 \rangle$ 使用（8）式方程得（2）无解

Ⅱ 将（3.2）中 $\langle 11;1 \rangle$ 代入（2）得

$$\sum_{k=0}^{10m+5}(x+2ck)^r+D_1+E=2^r[5t+28+50m+5s(20m+11)]^r \quad (9)$$

（5）左端方幂和中因子 2 的指数由（7）计算，设 $F=\sum_{k=0}^{T}(x+2ck)^r$，$T=10m+5$，$x=10t+1$，

$u=(x+cT)\cdot(T+1)$，$ordF=ordu$；$D_1=2^rF_1$，$F_1=\sum_{k=0}^{T_1}(r_1+2ck)^r$，

$T_1=5m+2$，$x_1=(x+c)/2=5s+5t+3$；$E=2^rF_2$，$F_2=\sum_{k=0}^{T_2}(x_2+2ck)^r$，

$T_2=5m+1$，$x_2=x_1+c=15s+5t+8$；$u_1=(x_1+cT_1)(T_1+1)$，

$u_2=(x_2+cT_2)(T_2+1)$

，若 $2+x_i$，$ordF_i=ordU_i(i=1,2)$. $H=2^r[5t+28+50m+5s(20m+11)]^r$

A. 当 $s=0$ 时，

$m=2p_1, T=20p_1+5, T_1=10P_1+2, T_2=10P_1+1,\ u=4(5t+13+50p_1)(10p_1+3),$

$u_1=(5t+13+50p_1)(10p_1+3),\quad u_2=2(5t+13+50p_1)(5p_1+1),$

$H=2^r[5t+28+100p_1]^r$

① $t=2t_1, ordF=2, 2$ 不整除 x_1, T_1 为偶数 $ordD_1=r, 2/x_2, ordE\ge 2r, ordH\ge 2r,$ 令 $p_1=2l_1+\theta_1$，（9）为 $2^2\equiv 0(8).$

② t 为奇数，令 $t=1,\ u=8(9+25p_1)(10p_1+3),\ 2/x_1,$ T_1 为偶数，$ordD_1\ge 2r, ordH=r>3.$

1．1） $p_1=2p_2,\quad T=40p_2+5, T_2=20P_2+1,$ $u=8(9+50p_1)(20p_2+3), ordF=3$；

$u_2=4(9+50p_2)(10p_2+1),\ \therefore ordE=r+2, ordF\prec ordD_1, ordF\prec ordE, ordF\prec ordH,$

令 $p_2=2l_1+\theta_1$,(9) 为 $2^3\equiv 0(2^4).$

$p_1=2p_2+1, T=40p_2+25$

1．2） $p_2=2p_3, T=80p_3+25, T_2=40p_3+11$；$u=16(17+50p_3)(40p_3+13),\ ordE=r+4$，令 $p_3=2l_1+\theta_1$，（9）为 $2^4\equiv o(2^5)$；$p_2=2p_3+1$，$T=80p_3+65$

继续 2 分 p_3 直到第七步 2 分 $p_{\lambda+1}$

1. $(\lambda+1))\quad p_{\lambda+1}=2p_\lambda$，$T=2^{\lambda+1}\cdot 5p_\lambda+B_1$，$T_2=2^\lambda\cdot 5p_\lambda+(B_1-3)/2$，$u=2^{\lambda+1}(q_1+50p_\lambda)(2^\lambda\cdot 5p_x+q_2)$，$ordF=\lambda+1$，$u_2=2^{\lambda+1}(q_1+50p_\lambda)(2^{\lambda-2}\cdot 5p_\lambda+q_3)$

$ordE=r+\lambda-1$，注意到 $ordD_1\ge 2r$，$ordH=r$，若 $\lambda+1>r$，（9）为 $o\equiv 2^r(2^{r+1})$；

若 $\lambda+1=r$，$n=2T+1>2r+2$，由引理 1 得（9）无解．若 $\lambda+1<r$，令 $p_\lambda=2l_1+\theta_1$，

为 $2^{\lambda+1}\equiv o(2^{\lambda+2})$．$p_{\lambda-1}=2p_\lambda+1$，$T=2^{\lambda+1}\cdot 5p_\lambda+B_2$，$n=2T+1\ge 2r+2$，由引理 1 得（9）无解．

今后，1 上述证明简述为：t=1，逐次 2 分 p_1 得 $T=20p_1+5$ 时，方程（9）无解．

当 t=3,5,...,2h+1 时，逐次 2 分 p_1 得 $T=20p_1+5$ 时，方程（9）无解．

$m=2p_1+1$，$T=20p_1+15$

2） $p_1=2p_2$，$T=40p_2+15$；$p_1=2p_1+1$，

$T=40p_2+35$，$T_1=20p_2+17$，

$T_2=20p_2+16$ 偶数，$u=8(5t+88+100p_2)(10p_2+9)$，

$u_1=2(5t+88+100p_2)(10p_2+9)$，$u_2=(5t+88+100p_2)(20p_2+17)$，

$H=2^r(5t+178+200p_2)^r$．

① $t=2t_1+1$，$ordF=3$；$2|x_1$，$ordD_1\ge 2r$；$2|x_2$，

$ordE=r$，$ordH=r$，

令 $p_2=2l_1+\theta_1$，（9）为 $2^3\equiv o(z^4)$．

② $t=4t_2+2$，$ordF=4$，$2|x_1$，$ordD_1=r+2$，$2|x_2$，

$ordE\ge 2r$，$ordH\ge 2r$，

令 $p_2=4l_2+\theta_2$，（9）为 $2^4\equiv o(z^5)$．

③ $t=4t_2+4$，逐次 2 分 p_2 得（9）无解．

继续 2 分 p_2 直到第 λ 步 2 分 $p_{\lambda-1}$

$\lambda)$ $p_{\lambda-1}=2p_\lambda$，$T=2^{\lambda+1}\cdot 5p_\lambda+B_\lambda$，$ord(B_\lambda+1)=\lambda$，令

$T+1=2^\lambda q$，$T_1=(T-1)/2$，$T_2=T_1-1$，

$u=(10t+1+5T)(T+1)=2^{\lambda+1}(5t\cdot 2+2^{\lambda-1}\cdot 5q)q$，

$u_1=2^{\lambda-1}(5t\cdot 2+2^{\lambda+1}\cdot 5q)q$，$H=2^r(5t=2+2^\lambda\cdot 5q)^r$

<1> $\lambda=2$

① $t=2t_1+1$，$ordF=\lambda+1$，$2|x_1$，$ordD_1\ge 2r$，$2|x_2$，$ordE=r=ordH$，若 $\lambda+1\ge r$，$n=2T+1\ge 2r+2$，由引理 1 得（9）无解，若 $\lambda+1<r$，令 $p_\lambda=2l_1+\theta_1$

为 $2^{\lambda+1}\equiv o(2^{\lambda+2})$．

② $t=4t_2+2$，$ordF=\lambda+2$，$2|x_1$，$ordD_1=r+\lambda$，

$2|x_2$，$ordE\ge 2r$，$ordH\ge 2r$，若 $\lambda+1\ge r$，$n=2T+1\ge 2r+2$，由引理 1 得（9）无解，若 $\lambda+2<2r$，令 $p_\lambda=4l_2+\theta_2$，（9）为 $2^{\lambda+2}\equiv o(2^{\lambda+3})$．

③ $t=4t_2+4$，逐次 2 分 p_λ 得（9）无解．

<2> $\lambda>2$ 时

① $t=2t_1+1$，证明与 $\lambda=2$ 中 相同

② $t=4t_2+2$，$ordF=\lambda+2$，$ordD_1=r+\lambda$，$2|x_2$，

$ordE\ge 2r$，$ordH=2r$，若 $\lambda+2\ge 2r$，$n=2T+1\ge 2r+2$，由引理 1 得（9）无解，若 $\lambda+2<2r$，令 $p_\lambda=4l_2+\theta_2$，（9）为 $2^{\lambda+2}\equiv o(2^{\lambda+3})$．

......

（$\lambda-1$） $t=2^{\lambda-1}t_{\lambda-1}+(2^{\lambda-3}+...+2^3+2)$，

$u=2^{\lambda+1}(5t-2+2^{\lambda-2}\cdot 5q)q=2^{2\lambda-1}(10t_{\lambda-1}+1+10q)q$

，$u_1=2^{2\lambda-3}(10t_{\lambda-1}+1+10q)q$，

$ordF=2\lambda-1$，$ordD_1=r+2\lambda-3$，分拆 $E=\sum_{i=2}^{\lambda-1}D_i$，

$D_i = 2^{ri} F_i$， $F_i = \sum_{k=0}^{T_i} (\frac{1}{2} x_i + 10k)^r$

$T_i = (T_{i-1} - 1)/2$， $x_{i+1} = \frac{1}{2} x_i + 5$， $u_i = (\frac{1}{2} x_i + 5T_i)(T_i + 1)$，$ordF_i = ordu_i$， 于是得出

$ordD_i = r_i + 2\lambda - 2 - i$， $i = 2,3,...,(\lambda - 2)$ ． $T_{\lambda-1} = T_{\lambda-2} - 1$，$F_{\lambda-1} = \sum_{K=0}^{T_{\lambda-1}} (x_{\lambda-1} + 5k)^r$，

$ordD_{\lambda-1} \ge (\lambda - 1)r$， $ordH = (\lambda - 1)r$， $ordF < ordD_i$，$i = 2,3,...,(\lambda - 1)$， $ordF < ordH$，

令 $p_\lambda = 2^{\lambda-1} l_{\lambda-1} + \theta_{\lambda-1}$，（9）为 $2^{2\lambda-1} \equiv o(2^{2\lambda})$ ．

(λ)　$t = 2^\lambda t_\lambda + (2^{\lambda-2} + ... + 2^3 + 2)$，逐次 2 分 p_λ 得（9）无解．

$(\lambda+1)$　$t = 2^{\lambda+1} t_{\lambda+1} + (2^{\lambda-1} + ... + 2^3 + 2)$， $u = 2^{2\lambda}(20t_{\lambda+1} + 2 + 5q)q$

$u_1 = 2^{2\lambda-2}(20t_{\lambda+1} + 2 + 5q)q$，

$ordF = 2\lambda, ordD_1 = r + 2\lambda - 2, 2/x_2,$ 类似 $(\lambda+1)$ 分拆 $E = \sum_{i=2}^{\lambda+1} D_i$,推得 $ordF \prec ordD_i$. 其中 $ordD_i = r_i + 2\lambda - 1 - i, i = 2,3,\ \ ,\lambda$，$ordD_{r+1} \ge (\lambda+1)r, ordH \ge (\lambda+1)r, ordF \ge ordH$, 令 $p_\lambda = 2^\lambda l_\lambda + Q_\lambda$,（9）为 $2^{2\lambda} \equiv o(2^{2\lambda+1})$.

$p_{\lambda-1} = 2p_\lambda + 1,\ T = 2^{\lambda+1} \cdot 5p_\lambda + B_{\lambda+1},\ n = 2T + 1 \ge 2r + 2,$ 由引理 1 得（9）无解．

B 当 $s = 2^{\lambda+1} s_{\lambda+1} + 2^\lambda (\lambda = 1,2,\cdots)$

1 ）　$m = 2p_1, T = 20p_1 + 5, T_1 = 10p_1 + 2, T_2 = 10p_1 + 1$，

$u = 4[5t + 13 + 50p_1 + 5s(20p_1 + 5)](10p_1 + 3)$

$H = 2^r[5t + 28 + 100p_1 + 5s(40p_1 + 11)]^r$ ．

① $t = 2t_1 + 1$，逐次 2 分 p_1 得（9）无解．

② $t = 2t_1$， $ordF = 2$， $2|x_1$， $ordD_1 = r$， $2|x_2$，$ordE \ge 2r$， $ordH \ge 2r$，

令 $p_1 = 2l_1 + \theta_1$，（9）为 $2^2 \equiv o(2^3)$ ．

$m = 2p_1 + 1$， $T = 20p_1 + 15$

2 ）　$p_1 = 2p_2$， $T = 40p_2 + 15$； $p_1 = 2p_2 + 1$，$T = 40p_2 + 35$， $T_1 = 20p_2 + 17$，

$T_2 = 20p_2 + 16$ 为偶数， $u = [5t + 88 + 100p_2 + 5s(40p_2 + 35)](10p_2 + 9)$，

$u_1 = 4[5s + 5t + 88 + 10s(20p_2 + 17)](10p_2 + 9)$，

$u_2 = [15s + 5t + 88 + 100p_2 + 10s(20p_2 + 16)](20p_2 + 17)$，

$H = 2^r[5t + 178 + 200p_2 + 5s(80p_2 + 73)]^r$

① $t = 2t_1 + 1$， $ordF = 3$， $2|x_1$， $ordD_1 \ge 2r$， $2|x_2$，$ordE = r$， $ordH = r$

令 $p_2 = 2l_1 + \theta_1$，（9）为 $2^3 \equiv o(2^4)$

② $t = 4t_2 + 2$， $ordF = 4$， $2|x_1$， $ordD_1 = r + 3$， $2|x_2$，$ordE \ge 2r$， $ordH \ge 2r$，

令 $p_2 = 4l_2 + \theta_2$，（9）为 $2^4 \equiv o(2^5)$

③ $t = 4t_2 + 4$，逐次 2 分 p_2 得（9）无解．

继续 2 分 p_2 直到第 λ 步 2 分 $p_{\lambda-1}$

λ) $p_{\lambda-1} = 2p_\lambda$， $T = 2^{\lambda+1} \cdot 5p_\lambda + B_\lambda$， $ord(B_\lambda + 1) = \lambda$， 令 $T + 1 = 2^\lambda q$， $T_1 = (T-1)/2$， $T_2 = T_1 - 1$，

$u = (x + CT)(T + 1) = 2^{\lambda+1}(5t - 2 + 2^{\lambda-1} \cdot 5q + 5sT)q$，

$u_2 = (15s + 5t - 2 + 2^{\lambda-1} \cdot 5q + 5sT)T_1$，

$H = 2^\lambda[5t - 2 + 2^\lambda \cdot 5q + 5s(2T + 1)]^r$

<1> $\lambda = 2$

① $t = 2t_1 + 1$， $ordF = \lambda + 1$， $2|x_1$， $ordD_1 \ge 2r$， $2|x_2$，$ordE = r = ordH$，若 $\lambda + 1 \ge r$， $n = 2T + 1 \ge 2r + 2$， 由引理 1 得（9）无解，若 $\lambda + 1 < r$，令 $p_\lambda = 2l_1 + \theta_1$

（9）为 $2^{\lambda+1} \equiv o(2^{\lambda+2})$ ．

② $t = 4t_2 + 2$， $ordF = \lambda + 2$， $2|x_1$， $ordD_1 = r + \lambda$，$2|x_2$， $ordE \ge 2r$， $ordH \ge 3r$， 若 $\lambda + 2 \ge 2r$，

$n=2T+1\geq 2r+2$，由引理 1 得（9）无解，若 $\lambda+2<2r$，令 $p_\lambda=4l_2+\theta_2$，（9）为 $2^{\lambda+2}\equiv o(2^{\lambda+3})$．

③ $t=4t_2+4$，逐次 2 分 p_λ 得（9）无解．

<2> $\lambda>2$ 时

① $t=2t_1+1$，证明与 $\lambda=2$ 中①相同

② $t=4t_2+2$，证明与 $\lambda=2$ 中②相同

......

（$\lambda-1$） $t=2^{\lambda-1}t_{\lambda-1}+(2^{\lambda-3}+...+2^3+2)$，

$u=2^{2\lambda-1}(10t_{\lambda-1}+1+10q+5sT/2^{\lambda-2})q$

，$u_1=2^{2\lambda-3}(10t_{\lambda-1}+1+10q+5sT/2^{\lambda-2})q$，

$ordF=2\lambda-1$，$ordD_1=r+2\lambda-3$， 分 拆 $E=\sum_{i=2}^{\lambda-1}D_i$，

$D_i=2^{ri}F_i$， $F_i=\sum_{k=0}^{T_i}(\frac{1}{2}x_i+10k)^r$

$T_i=(T_{i-1}-1)/2$， $x_{i+1}=\frac{1}{2}x_i+c$， $u_i=(\frac{1}{2}x_i+cT_i)(T_i+1)$，

若 $\frac{1}{2}x_i$ 为奇数，$ordF_i=ordu_i$，

$ordD_i=r_i+2\lambda-2-i$， $i=2,3,...,(\lambda-2)$．而 $T_{\lambda-1}=T_{\lambda-2}-1$

， $F_{\lambda-1}=\sum_{K=0}^{T_{\lambda-1}}(x_{\lambda-1}+ck)^r$，

$ordD_{\lambda-1}\geq(\lambda-1)r$， $ordH=(\lambda-1)r$， 得 到 $ordF<ordD_i$

，$i=2,3,...,(\lambda-1)$，及 $ordF<ordH$，令 $p_\lambda=2^{\lambda-1}l_{\lambda-1}+\theta_{\lambda-1}$，（9）为 $2^{2\lambda-1}\equiv o(2^{2\lambda})$．

(λ) $t=2^\lambda t_\lambda+(2^{\lambda-2}+...+2^3+2)$，逐次 2 分 p_λ 得（9）无解．

$(\lambda+1)$ $t=2^{\lambda+1}t_{\lambda+1}+(2^{\lambda-1}+...+2^3+2)$，$u=2^{2\lambda}(20t_{\lambda+1}+2+5q+5sT/2^{\lambda-1})q$

$u_1=2^{2\lambda-2}(20t_\lambda+2+5q+5sT/2^{\lambda-1})q$， $ordF=2\lambda,2/x_2$, 类似 $(\lambda+1)$ 分 拆 $E=\sum_{i=2}^{\lambda+1}D_i$: 推 得 $ordF\prec ordD_i$. 其 中 $i=2,3,\cdots,(\lambda+1)$， $ordF<ordH$, 令 $p_{□}=2^\lambda l\ +Q$，（9） 为 $2^{2\lambda}\equiv o(2^{2\lambda+1})$.

$p_{\lambda-1}=2p_\lambda+1$, $T=2^{\lambda+1}\cdot 5p_\lambda+B_{\lambda+1}$, $n=2T+1\geq 2r+2$, 由引理 1 得（9）无解．

C c 为奇数，使用情形 B 给出方法证得（9）无解．

由 A,B,C 证明了 <11；1> 对 $s\geq 0$ 方程（9）无解，（3.2）中 $\langle n_1;x_1\rangle$ 使用（9）式方法得（2）无解．

由Ⅰ，Ⅱ 证明了 $r=2v+1$ 方程（2）无解．

2. $r=2v+2$ （v>0）

将（3.3）中 <11；1> 代入（2）得

Ⅰ $\sum_{k=0}^{10m+5}(x+2ck)^r+D_1+D_2=2^r[5t+28+50m+5s(20m+11)]^r$ （10）

（10）左端方幂和中因子 2 的指数由（6）计算

设 $F=\sum_{k=0}^{T}(x+2ck)^r$， $T=10m+5$， $x=10t+1$，

$D_1=2^2F_1$， $F_1=\sum_{k=0}^{T_1}(x+2ck)^r$，

$T_1=5m+2$ ， $x_1=(x+c)/2=5s+5t+3$， $D_2=2^2F_2$，

$F_2=\sum_{k=0}^{T_2}(x+2ck)^r$， $T_1=5m+1$，

$x_1=x_1+c=15s+5t+8$ ，

$H=2^r[5t+28+50m+5s(20m+11)]^r$ ．

A s 为偶数

1） $m=2p_1$， $T=20p_1+5$， $ordF=1$，(10) 为 $2^1\equiv o(4)$； $m=2p_1+1$，

$T=20p_1+15$ ．

2） $p_1=2p_2$， $T=40p_2+15$， $p_1=2p_2+1$，

$T=40p_2+35$， $ordF=2$，(10) 为 $2^2\equiv o(2^3)$．

继续 2 分 p_2 直到第 λ 步 2 分 $p_{\lambda-1}$

λ) $p_{\lambda-1}=2p_\lambda$， $T=2^{\lambda+1}\cdot 5p_\lambda+B_\lambda$， $ord(B_\lambda+1)=\lambda$，

$ordF=\lambda$， $T_1=(T-1)/2$，

$T_2=T_1-1$， $H=2^\lambda[5t-2+2^\lambda\cdot 5q+5s(2T+1)]^r$

① $t=2t_1+1$， $2|x_1$， $ordD_1\geq 2r$， $2|x_2$， $ordF_2=0$，

$ordD_2=r$ ，$ordH=r$

若 $\lambda>r$，$n=2T+1\geq 2r+2$，由引理 1 得（10）无解；

若 $\lambda = r$ ，（10）为 $0 \equiv 2^r(2^{r+1})$ ；

若 $\lambda < r$ ，（10）为 $2^{\lambda} \equiv 0(2^{\lambda+1})$

② $t = 2t_1$ ， $2|x_1$ ， $ordD_1 = r + \lambda - 1$ ， $2|x_2$ ， $ordD_2 \geq 2r$

，$ordH \geq 2r$ ，若 $\lambda \geq 2r$ ，$n = 2T + 1 \geq 2r + 2$ ，由引理 1 得（10）无解；若 $\lambda < 2r$ ，（10）为 $2^{\lambda} \equiv 0(2^{\lambda+1})$

$p_{\lambda-1} = 2p_{\lambda} + 1$ ， $T = 2^{\lambda+1} \cdot 5p_{\lambda} + B_{\lambda+1}$ ， $n = 2T + 1 \geq 2r + 2$

，由引理 1 得（10）无解 .

B 当 s 为奇数时同法可证（10）无解 .

由 A,B, 证明了 <11；1> 方程（2）无解，

（3.3）中 $\langle n_1; x_1 \rangle$ 使用（10）式方法得（2）无解 .

Ⅱ 将（3.4）中 <11；2> 代入（2）并将 $(x+c)^2$ 移到等号右端

$$x^r + \sum_{k=2}^{20m+10}(x+ck)^r = [x + c(20m+11)]^r - (x+c)^r = H$$

（11）

设 $G = x^2 + \sum_{k=0}^{20m+10}(x+ck)^r$ ， $G_2 = x + 2c$ ，

$b_{20m+10} = x + c(20m+10)$ ，

$a_3 = x + 3c$ ， $b_{20m+9} = x + c(20m+9)$ ，……，$a_5 = x + 5c$ ，

$b_{20m+7} = x + c(20m+7)$

$a_2 + b_{20m+10} = ... = a_5 + b_{20m+7} = 2[x + c(10m+6)] = a + b$ ，

而 $x + [x - c(20m+6)] = 2[x + c(10m+3)] = a_1 + b_1$

r 为偶数，由 Kummer 恒等式

$$G = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^k \frac{r}{r-k}\binom{r-k}{k}(a+b)^{r-2k}[(a_2b_{20m+10})^k + ... + (a_5b_{20m+7})] + \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]}(-1)^k \frac{r}{r-k}\binom{r-k}{k}(a_1+b_1)^{r-2k}(a_1b_1)^k$$

从而 G 中不含因子 $a+b$.

而 $H = [x + c(20m+11)]^r - (x+c)^r = c(20m+10)(a+b)\left[\sum_{k=0}^{\frac{r-1}{2}}(-1)^k\binom{r-1-k}{k^l}(a+b)^{r-z-2k}(ab)^k\right]$

这里 $[x + c(20m+11)] + (x+c) = 2[x + c(10m+6)] = a + b$

H 有因子 $a+b$ 中括号末项系数 $\binom{r-1-\left[\frac{r-1}{2}\right]}{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ 其因子 2 的指数是中括号内诸项因子 2 指数最小者，所以，中括号和式因子 2 的指数 ord[ ]=ord $\binom{r-1-\left[\frac{r-1}{2}\right]}{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$

于是 ordH=ord{(20m+10)(a+b) $\binom{r-1-\left[\frac{r-1}{2}\right]}{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ }

当 $r = 2^{\lambda+1}v_x + 2^{\lambda}$ ，我们容易得到 $ord\binom{r-1-\left[\frac{r-1}{2}\right]}{\left[\frac{r-1}{2}\right]} = \lambda - 1$

为了方便计算 G 中因子 2 的指数，我们分拆：$G = F_1 + 2^r F_2 + 2^r F_3$

$F_1 = \sum_{k=0}^{T_1}(x_1 + 2ck)^r$ $T_1 = 10m + 3$ $x_1 = x + c = 10s + 10t + 7$

$F_2 = \sum_{k=0}^{T_2}\left(\frac{1}{2}x + 2ck\right)^r$ $T_2 = 5m + 2$ $\frac{1}{2}x = 5t + 1$

$F_3 = \sum_{k=0}^{T_3}(x_3 + 2ck)^r$ $T_2 = T_3$ $x_3 = \frac{1}{2}x + c = 10s + 5t + 6$

<1> $t = 2t_1 + 1$

$a + b = [10t_1 + 21 + 25m + 10s(5m+3)]$ 若 m 为偶数，$a + b = 4\Delta$ ，ord(a+b)=2

$\frac{1}{2}x$ 为偶数，x_3 为奇数

$r = 4v_1 + 2$ ordH=3

① $m = 2p_1$ ， $T_1 = 20p_1 + 3$ ； $m = 2p_1 + 1$ ， $T_1 = 20p_1 + 13$

，$ordF_1 = 1$ ，（11）为 $z' \equiv o(4)$

② $p_1 = 2p_2$ ， $T_1 = 40p_2 + 3$ ， $ordF_1 = 2$ ，（11）为 $z^2 \equiv o(8)$ ， $p_1 = 2p_2 + 1$

$T_1 = 40p_2 + 23$

③ $p_2 = 2p_3$ ， $T_1 = 80p_3 + 23$ ， $ordF_1 \equiv 3 = ordH$ ，H 有奇因子Δ而 G 中无Δ，

令 $E_1 = 2^3c_1$ ， $H = 2^3c_2$ ， $c_1 \neq c_2$ ， $c_1 - c_2 = 2^{\partial_1}c_3$ ，$\partial_1 \geq 1$ ，G–H=0，(11) 为

$z^{3+\partial_1} \equiv o(z^{4+\partial_1})$ ； $p_2 = 2p_3 + 1$ ， $T_1 = 80p_3 + 63$ ，

$ordF_1 \geq 4$ ，（11）为 $o = z^3(z^4)$

$r = 8v_2 + z^2$ ， $ordH = 4$

①，② 证明过程与 1）中 ①，② 相同

③ $p_2=2p_3$，$T_1=80p_3+23$，$ordF_1=3$，（11）为 $z^3\equiv o(z^4)$；$p_2=2p_3+1$

$T=80p_3+63$

④ $p_3=2p_4$，$T=160p_4+63$，$ordF_1\ge 5$，$T_2=80p_4+32=T_3$ 为偶数，$ord(2^rF_2)\ge 2r$，$ord(2^rF_3)=r$，当r=4时，$n=2(T_1+2)+1>2\times4+2=10$，由引理1得(11)无解。当 $r\ge12$，（11）为 $o\equiv z^4(z^5)$；$p_3=2p_4+1$，$T_1=160p_4+143$，$ordF_1=4$，$T_2=T_3=80p_4+72$，$ord(2^rF_2)\ge 2r$，$ord(2^rF_3)=r$，当 r=4 时，（11）为 $o\equiv z^4(z^5)$，当 $r\ge12$，G 无奇因子Δ而 H 有Δ，令 $G=z^4c_4$，$H=z^4c_5$，$c_4\ne c_5$，$c_4-c_5=z^{\partial_2}c_6$，$\partial_2\ge1$，G−H=0，（11）为 $z^{4+\partial_2}\equiv o(z^{5+\partial_2})$

....

λ）$r=2^{\lambda+1}v_\lambda+2^\lambda$，$ordH=\lambda+2$

①—③证明过程与2）中，①—③相同

④ $p_3=2p_4$，$T=160p_4+63$；$p_3=2p_4+1$，$T_1=160p_4+143$，$ordF_1=4$，（11）为 $z^4\equiv o(z^5)$

......

$(\lambda+1)$ $p_\lambda=2p_{\lambda+1}$，$T_1=2^{\lambda+2}\bullet5P_{\lambda+1}+B_{\lambda+1}$，$ord(B_{\lambda+1}+1)=\lambda+1$，$ordF_1=\lambda+1$，（11）为 $z^{\lambda+1}\equiv o(z^{\lambda+2})$，$p_\lambda=2p_{\lambda+1}$，$T_1=2^{\lambda+2}\bullet5P_{\lambda+1}+B_{\lambda+1}$

$(\lambda+2)$ $p_{\lambda+1}=2p_{\lambda+2}$，$T_1=2^{\lambda+3}\bullet5P_{\lambda+2}+B_{\lambda+2}$，$ord(B_{\lambda+2}+1)=\lambda+2$，$ordF_1=\lambda+2=ordH$，又 $T_2=T_3$ 为偶数，$ord(2^rF_2)\ge2r$，$ord(2^rF_3)=r$，G 无因子Δ而 H 有Δ，令 $G=2^{\lambda+2}c_7$，$H=2^{\lambda+2}c_8$，$c_7\ne c_8$，$c_7-c_8=2^{\partial_3}c_9$，$\partial_3\ge1$

G−H=0，（11）为 $z^{\lambda+2+\partial_3}\equiv o(z^{\lambda+3+\partial_3})$，$p_{\lambda+1}=2p_{\lambda+2}+1$，$T_1=2^{\lambda+3}\bullet5P_{\lambda+2}+B_{\lambda+2}$，$ord(B_{\lambda+2}+1)\ge\lambda+3$，$ordF_1\ge\lambda+3$，（11）为 $o\equiv z^{\lambda+2}(z^{\lambda+3})$

<2> $t=2t_1$ 同法可（11）证无解

综上证明了，当 $r=2v+2$ <11；2> 方程（2）无解（3.4）中 $\langle n_1;x_1\rangle$ 使用（11）式方法可证（2）无解．

由Ⅰ，Ⅱ证明了 $r=2v+2$ $(v>0)$ 方程（2）无解．

由1，2 定理证毕．

参考文献

1 潘承洞，潘承彪。初等数论：第 3 版 [M]. 北京：北京大学出版社，2017.

2 杜先存，万飞，赵金娥。关于丢番图方程 [J]. 安徽大学学报 (自然科学版),2014,38 (2):23−27.

3 冯蕾，赵西卿，刘建。一个包含 Smarandache 对偶函数的方程的正整数解 [J]. 甘肃科学学报，2015,27 (6):1−4.

4 L·F·D；ckson , History of the the theory of numbers , vol , Ⅱ ,

Washington , 1952 . 853

5 柯召，孙琦，关于丢番图方程的一个变形，四川大学学报，1963（2），33−42.

6 及万会 关于 Escott 方程 抚州师专学报，1996（3）5−13.

7 曹珍富 丢番图方程引论 哈尔滨工业大学出版社，1989，34.

8 张朝相，艾小川。费马大定理的初等证明方法 [J]. 华侨大学学报 (自然科学版),2016,37 (6):721−724.

A result concerning a system of consecutive equations

Li Zhongning, Jin Tao

(Yinchuan Energy Institute, Yinchuan, Ningxia 750105)

(Yinchuan Science and Technology College, Yinchuan,Ningxia750021)

Abstract: This paper uses elementary methods to prove that: when n, x, and r are positive integers andr>3,the integerx−1s20.c=10s +5.gcd(x.c)=1. The Diophantine equation E(x+ ck)=(x+ cn) has no integersolution.

Key words: Diophantine equation, power sum, factor,exponent, congruence equation.

作者简介：李忠宁（1981 年 −），男（汉），宁夏，副教授．从事基础数学及应用研究 ,Email:390581514@qq.com. 通讯作者：金涛（1982−），男，硕士，副教授，研究方向：偏微分方程、数学建模．撒海花（1998 年 −），女，硕士，助教，研究方向：社会统计学．